10 Понятие случайной величины и закон их распределения

Случайной величиной (далее будем обозначать СВ) называют числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход произошел в результате опыта со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют ***множеством значений*** этой случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон можно задать аналитически, таблично, графически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величиной X (*ДСВ X*) является ряд распределения.

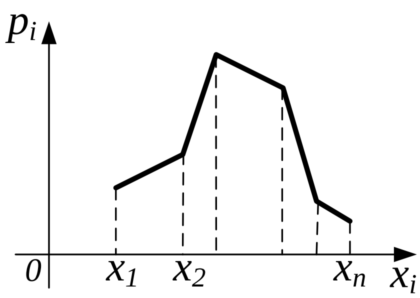
Рядом распределения вероятностей *ДСВ X* называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности $p_i = P\left(X = x_i\right)$ того, что случайная величина примет эти значения.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	p_n
p_i	$p_1 = P\left(X = x_1\right)$	$p_2 = P\left(X = x_2\right)$	$\dots$	$p_n = P\left(X = x_n\right)$

Так как события $X_1,\ldots,X_n$ несовместны, потому что *СВ* может принять в результате опыта только одно значение, и образуют полную группу событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для наглядности ряд распределения представляют графически. Для этого все возможные значения случайной величины откладывают по оси *0x*, а по оси *0y* – соответствующие вероятности. Вершины полученных ординат обычно соединяют отрезками прямых.



Такая фигура называется ***многоугольником распределения.***

Формы закона распределения

а) Функция распределения и её свойства

Функцией распределения *СВ X* называется функция *F(x)*, выражающая для каждого *x* вероятность того, что *СВ X* примет значение меньше *x:*

$$F(x)=P(X<x).$$

Функцию *F(x)* иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Для *ДСВ X*, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

где символ $x_i < x$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на все те возможные значения СВ, которые по своей величине меньше аргумента *x*.

Основные свойства функции распределения

Свойство 1. $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. Если $\beta \ge \alpha$, то $F(\beta) \ge F(\alpha)$.

Свойство 3. $p(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Свойство 4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1;$

$F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0;\ F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

б) Плотность вероятности и её свойства

Предел отношения вероятности попадания *СВ X* на интервал, содержащий точку *x*, к длине этого интервала, когда $\Delta x \to 0$, называется плотностью распределения вероятности *СВ* в точке *x* и обозначается *f(x)*.

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность попадания *СВ X* на (α, β) равна интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Функция распределения *F(x)*, выраженная через плотность распределения *f(x)*, имеет вид $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$

Основные свойства плотности вероятности

1. $f(x) \ge 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Если интервал возможных значений *СВ* имеет конечные пределы *(a, в)*, то $f(x) = 0$ вне интервала $\int_{a}^{в} f(x)\,dx = 1.$

11 Числовые характеристики случайных величин

а) Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием (МОЖ) ДСВ *X* называется сумма парных произведений возможных значений СВ на вероятности этих значений:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\,. \qquad (20)$$

Для непрерывной случайной величины(НСВ):

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f\left(x\right)dx,$$

где *f(x)* – плотность вероятности.

Простейшие свойства математического ожидания

1) $M(C)=C$.
2) $M(CX)=CM(X)$.
3) $M(X_1+\ldots+X_п) = M(X_1)+\ldots+M(X_п)$
$M(X_1-\ldots-X_п) = M(X_1)-\ldots-M(X_п)$

б) Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Характеристики, показывающие, насколько тесно сгруппированы возможные значения случайной величины около центра рассеивания (МОЖ), называются ***характеристиками рассеивания.***

Такими характеристиками являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией СВ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения, обозначается:

$$D(X)=M(X-a)^2$$

Из определения следует, что дисперсия *СВ X* вычисляется по формуле:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2 \qquad (21)$$

Дисперсия *СВ* обладает следующими свойствами:
1) $D(C)=0;$
2) $D(CX)=C^2D(X)$.
3) $D(X_1+\ldots+X_п) = D(X_1)+\ldots+D(X_п)$
$D(X_1-\ldots-X_п) = D(X_1)+\ldots+D(X_п)$

Дисперсия *СВ* является удобной характеристикой рассеивания возможных значений *СВ*, однако лишена наглядности, т.к. имеет размерность квадрата *СВ*.

Поэтому для характеристики отклонений *СВ X*, имеющей размерность, одинаковую с размерностью *СВ*, вводится понятие стандарта.

Средним квадратическим отклонением (СКО)*СВ X* называется арифметический корень из дисперсии, обозначается:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Ряд распределения СВ Х – «Числа попаданий» имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,24	0,46	0,26	0,04

Найти функцию распределения.

Решение.

При:

1) $x\le 0 \quad F(x)=P(X<0)=0$.

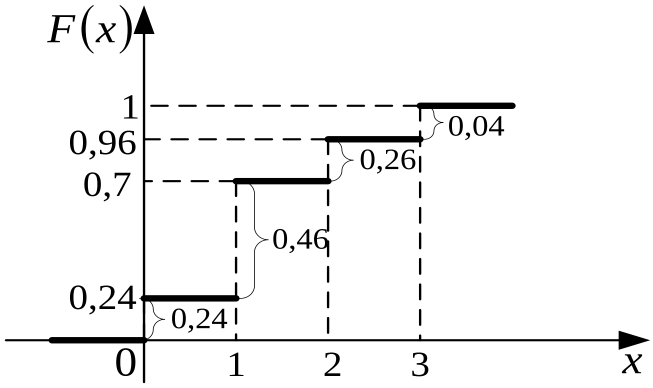
2) $0<x\le 1 \quad F(x)=P(X<1)=P(X=0)=0,24$.

3) $1<x\le 2 \quad F(x)=P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0,24+0,46=0,7$.

4) $2<x\le 3 \quad F(x)=P(X<3)=P(X<2)+P(X=2)=0,7+0,26=0,96$.

5) $x>3 \quad F(x)=P(X<3)+P(X=3)=0,96+0,04=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0,24, & 0<x\le 1;\\ 0,7, & 1<x\le 2;\\ 0,96, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 1\\ a(x-1)^2, & при \quad 1<x\le 3\\ 1, & при \quad x>3.\end{cases}$$

Найти:

1. коэффициент a;

2. $P(1 \le X < 2)$;

3. построить график функции *F(x)*.

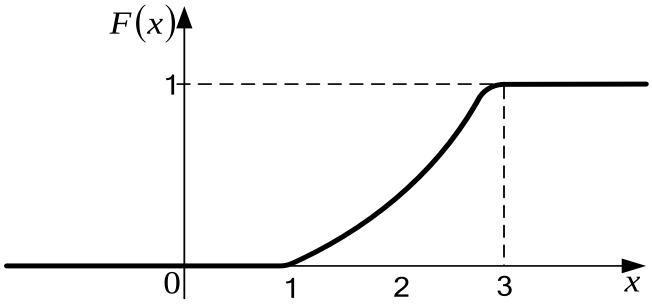
Решение.

1) Так как функция распределения непрерывной *СВ X* непрерывна, то при $x = 3$ имеем:

$$a(3-1)^2 = 1;\ a = \frac{1}{4};$$

2) $P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{4}(2-1)^2 - \frac{1}{4}(1-1)^2 = \frac{1}{4}$;

3)



Пример 3. Независимые **с**лучайные величины X и Y заданы законом распределения:

X	-3	1	2	3
p_i	0,1	0,4	0,3	…

Y	-1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,1	…

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 3X - 5Y^2$.

Решение. Найдем недостающие вероятности в законах распределения, зная, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1. Таким образом, P(X=3)=0,2, а P(Y=4)=0,4.

Найдем математическое ожидание случайной величины $Z = 3X - 5Y^2$.

$$M(X) = (-3) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = -0,3 + 0,4 + 0,6 + 0,6 = 1,3$$

Аналогично,

$$M(Y) = (-1) \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 = -0,3 + 0,4 + 0,3 + 1,6 = 2$$

$$M(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,4 =$$
$$= -0,3 + 0,8 + 0,9 + 6,4 = 7,8$$

Тогда,

$$M(Z) = M(3X - 5Y^2) = M(3X) - M(5Y^2) = 3M(X) - 5M(Y^2) = 1*1,3 - 5*7,8 =$$
$$= 1,3 - 39 = -37,7$$

Из свойств дисперсии следует:

$$D(Z)=D(3X-5Y^2)=D(3X)+D(5Y^2)=9D(X)+25D(Y)$$

Найдем дисперсию случайных величин X и Y.

$$D(X)=M(X^2)\ -\ (M(X))^2=(-3)^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}3+3^2\cdot 0{,}2-$$
$$-((-3)\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}2)^2=3$$

$$D(Y)=M(Y^2)\ -\ (M(Y))^2=(-1)^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1+4^2\cdot 0{,}4-$$
$$-((-1)\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}4)^2=6{,}4$$

Следовательно, $D(Z)=9\cdot 3+25\cdot 6{,}4=187$.

Тогда $\sigma(Z)=\sqrt{D(Z)}=\sqrt{187}$

Пример 4. Случайные величины x и y независимы. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины z=8x-4y, если M(x)=7; M(y)=15; D(x)=10; D(y)=20

M(z)=M(8x-4y)= 8M(x)-4M(y)=8*7-4*15=56-60=-4

D(z)=D(8x-4y)= 64D (x)+16D(y)=64*10+16*20=640+320=960

$$\sigma(Z)=\sqrt{D(Z)}=\sqrt{960}$$

Пример 5. Случайная величина X задана законом распределения:

X	-3	1	2	3
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти дисперсию случайной величины $Z=3X^2+2X+5$.

Решение. *D(Z)=M(Z²) - (M(Z))²*

Т.к. случайные величины X и X^2 не являются независимыми, то закон распределения случайной величины Zпримет вид:

Z	$3(-3)^2+2(-3)+5=26$	10	21	38
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Тогда закон распределения случайной величины Z^2 примет вид:

Z	676	100	441	1444
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Таким образом,

$$D(Z)=M(Z^2)\ -\ (M(Z))^2=676\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}4+441\cdot 0{,}3+1444\cdot 0{,}2-$$
$$-(26\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}4+21\cdot 0{,}3+38\cdot 0{,}2)=508{,}2$$

Пример 6. Обстреливается 5 целей. Вероятность поражения одной цели равна 0,6. Найти математическое ожидание числа пораженных целей и дисперсию.

Решение.

Пусть СВ X – число пораженных целей. Её возможные значения 0,1, 2, 3, 4, 5. Вычисляя вероятности возможных значений СВ по формуле Бернулли при $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, получим следующий ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

По формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, находим:

$$M(X)=0\cdot 0{,}01024+1\cdot 0{,}0768+2\cdot 0{,}2304++3\cdot 0{,}3456+4\cdot 0{,}2592+5\cdot 0{,}07776=3.$$

Для нахождения *D(X)* составим ряд:

x_i^2	0	1	4	9	16	25
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

$$D(X)=\sum_{i=0}^{6} x_i^2 p_i - m^2 = 0\cdot 0{,}01024+1\cdot 0{,}0768+4\cdot 0{,}2304+$$

$$+9\cdot 0{,}3459+16\cdot 0{,}2592+25\cdot 0{,}07776-3^2=1{,}2027.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(\tilde{O})};\qquad \sigma(X)=1{,}097.$$

Пример 7. Непрерывная СВ задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & при \quad 0\le x\le 2\\ 0\quad , & при \quad x<0 \quad и \quad x>2.\end{cases}$$

Найти *M(X)* и *D(X)*.

Решение.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad \text{и} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)$$

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=\frac{3}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)\ -\ (M(X))^2=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{20}}=0{,}387.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,4	0,32	0,2

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность событий $A = \{x < 2\}, B = \{1 \le x < 3\}, C = \{1 < x \le 3\}$.

в) построить полигон и график функции $F(x)$.

г) найти M(X), D(X), σ(X).

д) Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X^2 + 4X - 2$.

2. Студенты одной из групп экономического факультета сдают все экзамены только на хорошо и отлично. Вероятность получения отличной оценки равна 0,6, а хорошей – 0,4. В течение экзаменационной сессии студенту этой группы предстоит сдать 4 экзамена. Найти закон распределения случайной величины X – числа полученных им баллов.

3. Известно, что в определенном городе 20 % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека.

а) Составьте закон распределения числа людей предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом и постройте полигон распределения.

б) Найдите функцию распределения и постройте ее график.

4. На предприятии работает 200 человек. Из них 10 получают по 1800 рублей, 40 – по 1500 рублей, 80 человек – по 1200 рублей, 50 человек – по 1000 рублей и 20 человек – по 700 рублей. Определить среднюю заработную плату работника (рассматривая зарплату, как дискретную случайную величину), ее дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

5. Дисперсия случайной величины равна 5. Найти дисперсию величин: $(X-1)$; $(-X)$; $(3X+6)$.

6. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$,если $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$.

7. Непрерывная СВ задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \le 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Требуется: а) составить *f(x)*.

б) найти: *M(X); D(X)*; *σ*; $P(1 < X < 3)$.

а) построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.